Aufgabe2: Geraden im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Welche Lage haben g_1 und g_2 zueinander? Bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

b) Stelle die Gleichung der Ebene E, die durch g_1 und g_2 bestimmt wird, auf.

c) Gib eine Gleichung einer Geraden g_3 an, die zu g_1 und g_2 windschief ist. Begründe deine Wahl.

d) Berechne die Spurpunkte von g_1 und g_2 mit den Koordinatenebenen und zeichne damit die beiden Geraden. Trage zusätzlich den Schnittpunkt der beiden Geraden ein.

e) Bestimme den Schnittwinkel von g_1 und g_2.

f) Bestimme die Neigungswinkel der Geraden g_1 und g_2 mit den Koordinatenebenen.

g) Lässt sich für g_1 eine Koordinatenform angeben? Wenn ja, bestimme sie. Wenn nein, begründe warum es nicht möglich ist.

Lösung:

a) Betrachte zunächst die beiden **Richtungsvektoren der Geraden**:

da $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 schneiden sich oder sind windschief

Ansatz für den möglichen Schnittpunkt:

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & k+2l=-5 & \\ \text{II} & k\quad\;\; =-1 & \Rightarrow k=-1 \\ \text{III} & \quad -l=\;\;2 & \quad\;\; l=-2 \end{array}$$

k und l in I : $-1+2(-2)=-5$ $\Rightarrow$ wahre Aussage $\Rightarrow$ Gleichungssystem eindeutig lösbar $\Rightarrow$ Schnittpunkt S

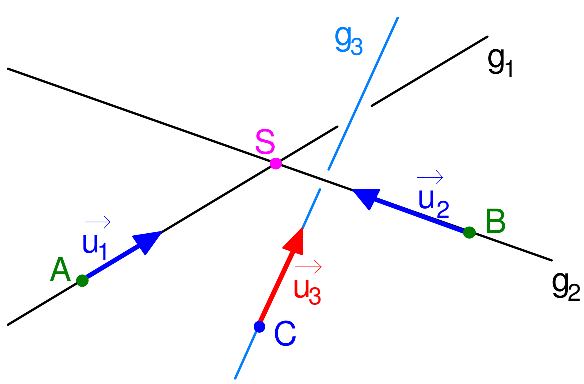
Einsetzen von k in g_1 liefert: $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ **Schnittpunkt** $\underline{\underline{S(1\mid -1\mid 1)}}$

oder Einsetzen von l in g_2 liefert ebenfalls S.

b) Verwende die Gleichung von g_1 und zusätzlich den Richtungsvektor von g_2:

Gleichung von E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

c) Betrachte die Überlegungsfigur:



Die gesuchte Gerade hat die Form:

$\vec{x}=\vec{c}+m\vec{u}_3$

Damit g_3 zu g_1 und g_2 windschief sein soll, darf der **Richtungsvektor** $\vec{u}_3$ nicht in der von $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ aufgespannten Ebene liegen, also nicht komplanar zu $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sein.

$\vec{u}_3$ darf sich also nicht aus $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ linear kombinieren lassen.

Da z. B. $\vec{u}_1+\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ eignet sich $\vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor von g_3.

Als **Aufhängepunkt** C von g_3 eignet sich ein Punkt, der weder auf g_1 noch auf g_2 liegt. Deshalb genügt es, S geringfügig zu ändern, z. B. in C(1 | −1 | 0).

Damit lautet eine **mögliche Gleichung** für g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Prüfe nochmal nach, ob g_3 tatsächlich zu g_1 und zu g_2 windschief ist.

d) Spurpunkte von g_1

in x_1x_2-Ebene, d. h. $x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow$ W! $\Rightarrow$ kein Spurpunkt

in x_1x_3-Ebene, d. h. $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ Spurpunkt $\underline{\underline{S_2\,(2 \mid 0 \mid 1)}}$

in x_2x_3-Ebene, d. h. $x_1 = 0 \Rightarrow 0 = 2 + k \Rightarrow k = -2 \Rightarrow$ Spurpunkt $\underline{\underline{S_3\,(0 \mid -2 \mid 1)}}$

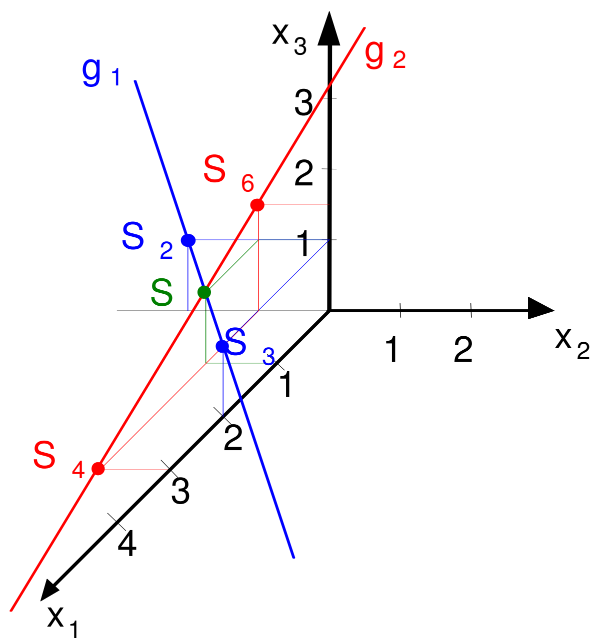
Spurpunkte von g_2:

in x_1x_2-Ebene $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S_4\,(3 \mid -1 \mid 0)}}$

in x_1x_3-Ebene $\Rightarrow$ kein Spurpunkt

in x_2x_3-Ebene $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S_6\,(0 \mid -1 \mid 1{,}5)}}$

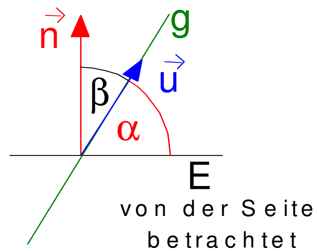
Zeichnung:



e) Schnittwinkel von g_1 und g_2:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = -0{,}632 \Rightarrow \varphi = 129{,}2° \text{ bzw. als der kleinere Winkel } \underline{\underline{\varphi = 50{,}7°}}$$

f) Allgemeine Überlegung zum Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene:



Für den Neigungswinkel α gilt: $\alpha + \beta = 90°$.

Dabei ist β der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und einem Lotvektor $\vec{n}$ der Ebene.

Weiter gilt: $\cos\beta = \sin\alpha$.

Neigungswinkel von g_1:

mit x_1x_2-Ebene: da $g_1 \parallel x_1x_2$-Ebene $\Rightarrow$ kein Neigungswinkel

mit x_1x_3-Ebene: Lotvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha_1 = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 1} = 0{,}7071 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = 45°}}$

mit x_2x_3-Ebene: Lotvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha_2 = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 1} = 0{,}7071 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_2 = 45°}}$

Neigungswinkel von g_2:

mit x_1x_2-Ebene: Lotvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha_3 = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 1} = 0{,}4472 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_3 = 26{,}6°}}$

mit x_1x_3-Ebene: da $g_2 \parallel x_1x_3$-Ebene $\Rightarrow$ kein Neigungswinkel

mit x_2x_3-Ebene: Lotvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha_4 = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot 1} = -0{,}8944 \Rightarrow \alpha_4 = -63{,}4°$

bzw. $\underline{\underline{\alpha_4 = 63{,}4°}}$, da es nur auf den absoluten Wert ankommt.

g) Für g_1 lässt sich keine Geradenform angeben, da Gleichungen der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$ im $\mathbb{R}^3$ Ebenen darstellen.